<u>Μάθημα 4ο</u> <u>05/03/15</u>

Ροπές Πληθυσμού : $\mu = E(X^k)$, $E(X-\mu)^k$, $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^k$

Ροπές Δείγματος: $X_1, \dots, X_n$ (τυχαίο δείγμα)

(i) Δειγματική ροπή κ-τάξης περί το μηδέν.

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad m_1 = \bar{X}$$

(ii) Δειγματική κεντρική ροπή κ-τάξης

$$V_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, \quad k = 2, 3, \dots, \quad V_2 = S'^2$$

(iii) Δειγματική τυπική ροπή κ-τάξης

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S'}\right)^k, \quad k = 2, 3, \dots$$

a_3 = δειγματικός συντελεστής λοξότητας

a_4 = κυρτότητας.

Για τυχαία μεταβλητή X η ροπογεννήτρια συνάρτηση : $m_X(t) = E(e^{tX})$

(i) $\mu_k = E(X^k) = \left.\frac{d\, m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$

(ii) $m_{aX+b}(t) = e^{bt} m_X(at)$, a και b σταθερές

(iii) $m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = m_{X_1}(t) \cdots m_{X_n}(t)$, X_i σταθ. τ.μ.

(iv) $m_X(t) = m_Y(t)\ \forall t \Leftrightarrow X$ και Y ~~σταθ.~~ ισόνομες τ.μ.

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$, a_i σταθ., X_i σταθ. τ.μ.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

Διπλός Ρόλος των τυχαίων δειγμάτων.

Τυχαίο Δείγμα $x_1, \ldots, x_n$ από ένα πληθυσμό X είναι οι τιμές της τ.μ. X

Τυχαίο Δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από ένα πληθυσμό X είναι n ανεξάρτητες και ισόνομες με την X τ.μ. (με την έννοια της νοερής επανάληψης της διαδικασίας)

π.χ. X: ύψος παιδιών προσχολικής ηλικίας.

$x_1, \ldots, x_{10}$: 10 τιμές της τ.μ. X που προέκυψαν από τη δειγματοληψία

τυχαίο δείγμα:

$$X_1, \ldots, X_{10}: \left\{ \begin{array}{cccc} X_1 & & & X_{10} \\ x_{11}, & \ldots, & & x_{1,10} \\ x_{21}, & \ldots, & & x_{2,10} \\ \vdots & & & \\ x_{n1}, & \ldots, & & x_{n,10} \end{array} \right.$$

Στατιστικές - Δειγματικές κατανομές.

A, B

$n = 100$

X = ψηφοφόροι του A

$X = 65$

$p = \frac{X}{n} = \frac{65}{100} = 65\%$

$X \sim B(n = 100, p)$

$\mu, \sigma^2 \leftarrow \bar{x}, S'^2$

$t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$S' = S'(x_1, \ldots, x_n)$

Μέσες τιμές και διακυμάνσεις των $\bar{X}$ και S^2

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $x_1, \ldots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό X με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Τότε:

(i) $E(\bar{X}) = \mu$,

(ii) $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(iii) $E(S^2) = \sigma^2$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$S'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x} \right]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(i) $E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\mu = \mu$

(ii) $Var(\bar{x}) = Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}Var(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

(iii) $E(s^2) = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu)-(\bar{x}-\mu)\right]^2\right\}$

$= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(\bar{x}-\mu)\right\} =$

$+n(\bar{x}-\mu)^2 - 2(\bar{x}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) =$

$n(\bar{x}-\mu)^2 - 2(\bar{x}-\mu)(n\bar{x}-n\mu)$

$n(\bar{x}-\mu)^2 - 2n(\bar{x}-\mu)^2 =$

$-n(\bar{x}-\mu)^2$

$= \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right\} =$

$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(x_i-\mu)^2 - nE(\bar{x}-\mu)^2\right] =$ $\quad \{\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = Var(X)\}$

$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right.$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $x_{11},\dots,x_{1n}$, τυχαίο δείγμα πληθ. (μ_1, σ_1^2) και
$x_{21},\dots,x_{2n}$, τυχαίο δείγμα από άλλο ανεξ. πληθ. (μ_2, σ_2^2)

Αν $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}$ και $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}$ τότε:

$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$ και $Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $X \sim P(X=x) = \frac{1}{3}$, $x = 3, 4, 5$. (πληθυσμός τ.δ. $n=2$, με επανάθεση)

$\mu = E(X) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 5 = 4$

$\mu = 4$, $\sigma^2 = \frac{2}{3}$, $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

$E(X^2) = \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{3^2} + \frac{1}{3} 4^2 + \frac{1}{3} 5^2 = 3 + \frac{16}{3} + \frac{25}{3} = \frac{50}{3}$

$\sigma^2 = \frac{50}{3} - 4^2 = \frac{2}{3}$

Δυνατά Δείγματα: (3,3) (3,4) (3,5) (4,3) (4,4) (4,5) (5,3) (5,4) (5,5)

$\bar{X}$:	3	3.5	4	4.5	4	4.5	4	4.5	5
S^2 :	0	0.5	2	0.5	0	0.5	2	0.5	0

$\bar{X}$:	3	3.5	4.5	4	5
$P(\bar{X} = \bar{x})$:	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

S^2 :	0	0.5	2
$P(S^2 = s^2)$:	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$E(\bar{X}) = 3 \cdot \frac{1}{9} + \dots + 5 \cdot \frac{1}{9} = 4$

$E(S^2) = 0 \cdot \frac{3}{9} + 0.5 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \left(= \sigma^2\right)$

$Var(\bar{X}) = \frac{147}{9} - 16 = \frac{1}{3} = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$